STUDIENKOLLEG TU-BERLIN / KÖHNE MATHEMATIK/Analysis

NAME/KURS:........................... DATUM:

5.4 Umkehrfunktion

<u>Definition</u>: Eine ***<u>Umkehrfunktion</u>*** f^{-1} ist eine eindeutige Abbildung, die jedem Element des Wertebereichs von f genau ein Element des Definitionsbereichs von f zuordnet.

Der Definitions-Bereich von f ist also der W-Bereich von f^{-1} und umgekehrt.

Anschaulich bedeutet das: Eine Funktion heißt umkehrbar, wenn zu jedem verschiedenen Element von D auch ein verschiedenes Element von W gehört.

Für den Graphen $G_{f(x)}$ bedeutet das:

Auf einer Parallelen zur x-Achse dürfen niemals mehrere Punkte der Kurve liegen.

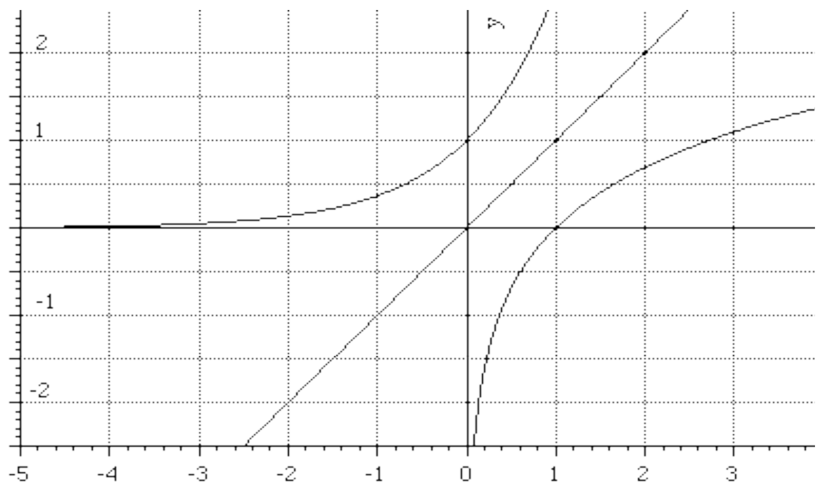
Der Graph der Umkehrfunktion ist der Graph, der durch Achsenspiegelung des Graphen $G_{f(x)}$ an der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten eines Kartesischen Koordinatensystems entsteht.

Zu beachten : $f^{-1} \neq 1/f$ und $(f^{-1})^{-1} = f$

Beispiele zu Umkehrfunktionen:

a) $f(x) = e^x$ und $f(x) = \ln(x)$

s. nebenstehenden Graphen.



b) Bestimung der Umkehrfunktion von:

$y = 0{,}5\, x^2 - 1$

i) Auflösen nach x:

ii) x und y vertauschen:

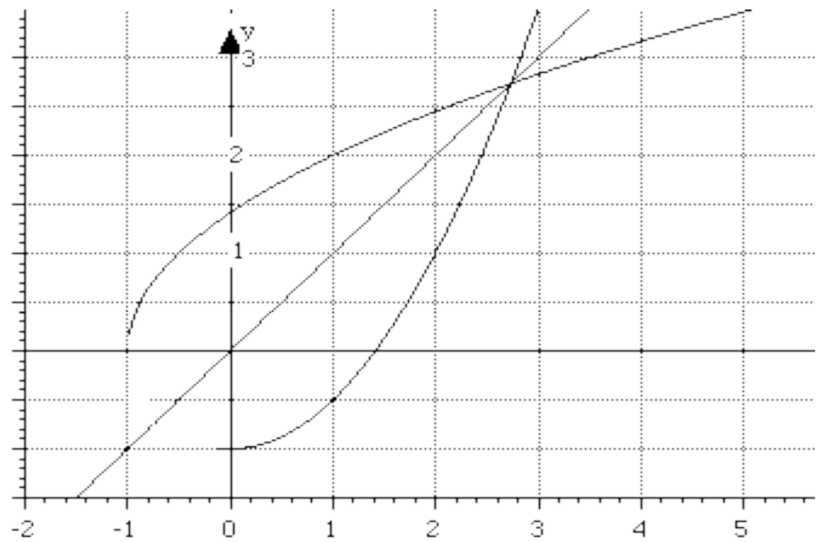
<u>Monotonie und Umkehrfunktion:</u>

$$x = \sqrt{2(y+1)}$$

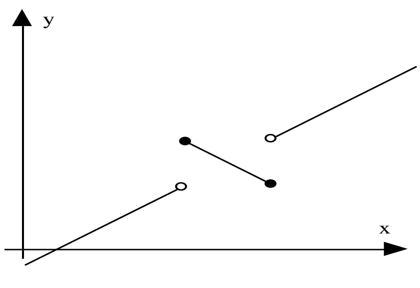
Wenn eine Funktion streng monoton ist, dann ist sie auch umkehrbar. (Das gilt nicht umgekehrt).

Beispiele:

$$y = \sqrt{2(x+1)}$$



umkehrbar, aber nicht streng monoton



nicht streng monoton und nicht um kehrbar: